Дифференциальные сравнения для коэффициентов полуголономности и компонент объектов неголономности приводятся к виду

$$\Delta\lambda^I_{JKL} + \omega^I_{[JK]L} \cong 0,\ \Delta N^\alpha_{\beta ij} + \omega^\alpha_{[ij]\beta} \cong 0,\ \Delta N^\alpha_{\beta\gamma i} + \omega^\alpha_{[\beta\gamma]i} \cong 0.$$

В общем случае эти объекты не образуют тензоры, но при условиях их тензорности

$$\omega^I_{[JK]L} \cong 0 \Rightarrow \omega^\alpha_{[ij]\beta} \cong 0,\ \omega^\alpha_{[\beta\gamma]i} \cong 0,$$

инвариантны равенства

$$\lambda^I_{JKL} = 0 \Rightarrow N^\alpha_{\beta ij} = 0,\ N^\alpha_{\beta\gamma i} = 0,$$

фигурирующие в следствиях 1), 3).

Литература

1. Лаптев Г. Ф. *Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии* // Тр. геом. семинара. –1966. – Т.1 –М. – С. 139-189.

2. Шевченко Ю. И. *Оснащения голономных и неголономных гладких многообразий* // Калининград. – 1998. – 83с.

3. Shevchenko Ju. I., Skrydlova E. V. *About non-holonomicity of quotient manifold of holonomic distribution on semi-holonomic smooth manifold* // Междунар. конф. по алгебре, анализу и геометрии. Казань. –2016. – С. 67-68.

NON-HOLONOMICITY OF QUOTIENT MANIFOLD OF HOLONOMIC DISTRIBUTION ON SEMI-HOLONOMIC SMOOTH MANIFOLD

Yu.I. Shevchenko, E.V. Skrydlova

Using the Laptev structure equations, holonomic, semi-holonomic, internally and externally non-holonomic smooth manifolds are defined. On a smooth manifold we consider a holonomic distribution that generates the factor manifold. It is proved that the factor manifold of a semi-holonomic manifold is internally and externally non-holonomic, and the factor manifold of a holonomic manifold is holonomic.

Keywords: Holonomic manifold, semi-holonomic manifold, internally and externally nonholonomic manifolds.

УДК 514.763.7

О ”ШЕСТИУГОЛЬНЫХ” РЕШЕНИЯХ НЕКОТОРЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

А.М. Шелехов[1]

1 *amshelekhov@rambler.ru*; Московский педагогический государственный университет

Для некоторых известных уравнений в частных производных найдены решения, которым соответствует шестиугольная три-ткань.

Ключевые слова: три-ткань, уравнение в частных производных.

1. Три-тканью называют 3 семейства кривых на плоскости. В частности, всякое решение

$$z = f(x, y) \tag{1}$$

дифференциального уравнения определяет на плоскости переменных x, y три-ткань W — 3 семейства линий $x = const$, $y = const$ и $f(x, y) = const$. Это дает возможность использовать геометрию три-тканей для описания свойств решений дифференциальных уравнений.

Самые простые три-ткани — параллельные — образованы семействами параллельных прямых. Эквивалентные (локально диффеоморфные) им три-ткани называют шестиугольными или регулярными. Известно [1], [2], что уравнение (1) определяет регулярную три-ткань тогда и только тогда, когда оно имеет вид

$$z = f(\alpha(x) + \beta(y)). \tag{2}$$

Мы рассматриваем некоторые известные уравнения в частных производных и ищем их решения вида (2). Множество таких решений зависит от трех параметров. Поскольку шестиугольные три-ткани (и только они) допускают максимальную (трехпараметрическую) группу автоморфизмов [2], с ними связана некоторая группа симметрий соответствующего дифференциального уравнения.

2. Дифференцируемая однородная функция f степени k удовлетворяет уравнению Эйлера

$$xf_x + yf_y = kf. \tag{3}$$

Пусть f имеет вид (2). Тогда $f_x = f'\alpha'$, $\quad f_y = f'\beta'$, где штрих у f' обозначает производную по аргументу $\theta = \alpha + \beta$. Подставляя в (3), получим $xf'\alpha'(x) + yf'\beta'(y) = kf$, откуда следует

$$d\ln f = k\frac{d(\alpha + \beta)}{x\alpha'(x) + y\beta'(y)}. \tag{4}$$

Отсюда $\frac{k}{x\alpha'(x)+y\beta'(y)} = \varphi(\alpha+\beta)$, где φ — некоторая гладкая функция. Продифференцируем последнее равенство по x и y, и найдем отношение полученных производных:

$$\frac{x\alpha''(x)}{\alpha'(x)} = \frac{y\beta''(y)}{\beta'(y)}.$$

Левая часть этого равенства зависит только от x, правая – только от y. Следовательно, это отношение есть постоянная, обозначим ее c. Тогда после интегрирования получим: $\alpha'(x) = ax^c$, $\quad \beta'(y) = by^c$, где a и b — постоянные. Подставляя в (4), найдем f и уравнение рассматриваемой три-ткани:

$$z = p(ax^{c+1} + by^{c+1})^{\frac{k}{c+1}}, p = const. \tag{5}$$

Доказана

Теорема 1. *Решение уравнения (3) имеет вид (2) тогда и только тогда, когда f приводится к виду (6).*

При изоморфизме $x^{c+1} \to \bar{x}, y^{c+1} \to \bar{y}, z^{c+1} \to \bar{z}$ уравнение (6) переходит в более простое: $\bar{z} = p(a\bar{x} + b\bar{y})^k$.

3. Пусть f имеет вид (2) и удовлетворяет гармоническому уравнению

$$f_{xx} + f_{yy} = 0. \tag{6}$$

Тогда
$$f_{xx} = f''(\alpha')^2 + f'\alpha'', \quad f_{yy} = f''(\beta')^2 + f'\beta''$$
и уравнение (6) примет вид
$$f''((\alpha')^2 + (\beta')^2) + f'(\alpha'' + \beta'') = 0.$$
Это равенство перепишем в виде
$$\alpha'' + \beta'' = ((\alpha')^2 + (\beta')^2)g(\alpha + \beta), \tag{7}$$
где обозначено
$$g(\alpha + \beta) = -f''(f')^{-1}. \tag{8}$$
Продифференцировав равенство (7) по x, затем по y, придем к уравнению
$$\alpha'\beta'(g''((\alpha')^2 + (\beta')^2) + 2g'\alpha'' + 2g'\beta'') = 0.$$
Так как $\alpha(x)$ и $\beta(y)$ не являются постоянными, то $\alpha'\beta' \neq 0$. Приравнивая нулю выражение в скобках, с учетом (7) получим уравнение $g'' + 2gg' = 0$, или $g'' + (g^2)' = 0$. Отсюда $g' + g^2 = c$, где c — постоянная.

В случае $c = a^2$ получим решение $g = -a\coth a(b - \theta)$, где b — постоянная.

В случае $c = -a^2$ получим решение $g = a\tan a(b - \theta)$.

В случае $c = 0$ получим решение $g = (b + \theta)^{-1}$.

В первом и втором случаях ткань не существует.

В третьем случае равенство (7) принимает вид:
$$(\alpha + \beta)''(b + \alpha + \beta) = (\alpha')^2 + (\beta')^2. \tag{9}$$
Продифференцировав его по x и y, получим
$$\alpha'\beta''' + \alpha'''\beta' = 0. \tag{10}$$
Отсюда
$$\frac{\alpha'''}{\alpha'} = -\frac{\beta'''}{\beta'} = q = const.$$
Предположим сначала, что третьи производные не нули и пусть $q = -p^2$, тогда решения этих уравнений имеют вид:
$$\alpha = \frac{r}{p}\cos px + \frac{s}{p}\sin px, \ \beta = \frac{u}{p}\cosh py + \frac{v}{p}\sinh py, \tag{11}$$
где r, s, u, v — постоянные. Подставим найденные решения в (9) и учтем, что
$$\alpha''\beta + \alpha\beta'' = \alpha\beta(\frac{\alpha''}{\alpha} + \frac{\beta''}{\beta})\alpha\beta(-p^2 + p^2) = 0.$$
После преобразований получим:
$$bp(-r\cos px - s\sin px + u\cosh py + v\sinh py) + u^2 - v^2 = r^2 + s^2.$$
Отсюда следует $b = 0$ и
$$u = d\cosh\beta_0, \ v = d\sinh\beta_0, \ r = \cos\alpha_0, \ s = d\sin\alpha_0.$$

В результате получаем:

$$\alpha = \frac{d}{p}\cos(\alpha_0 - px),\ \beta = \frac{d}{p}\cosh(\beta_0 + py). \tag{12}$$

Найдем f. В рассматриваемом случае равенство (8) (с учетом $b = 0$) принимает вид $f''(f')^{-1} = -\theta^{-1}$. Интегрируя, находим $f = c\ln\theta + c_1$. Поставляя сюда $\theta = \alpha + \beta$ и учитывая (12), окончательно получаем:

$$f = c\ln(\cos(\alpha_0 - px) + \cosh(\beta_0 + py)) + \bar{c}. \tag{13}$$

4. Рассмотрим исключенный случай $\alpha''' = \beta''' = 0$. Тогда

$$\alpha = \alpha_0 x^2 + 2\alpha_1 x + \alpha_2,\ \beta = \beta_0 y^2 + 2\beta_1 y + \beta_2.$$

Подставляя в (9) и приравнивая коэффициенты при соответствующих степенях, получим систему соотношений:

$$\begin{aligned}
&2\alpha_0(\alpha_0 + \beta_0) = 4\alpha_0^2,\ 2\beta_0(\alpha_0 + \beta_0) = 4\beta_0^2,\\
&4\alpha_1(\alpha_0 + \beta_0) = 8\alpha_0\alpha_1,\ 4\beta_1(\alpha_0 + \beta_0) = 8\beta_0\beta_1,\\
&(b + \alpha_2 + \beta_2)(\alpha_0 + \beta_0) = 2(\alpha_1^2 + \beta_1^2).
\end{aligned}$$

Эти соотношения сводятся к следующим:

$$\alpha_0 = \beta_0,\ \alpha_0(b + \alpha_2 + \beta_2) = \alpha_1^2 + \beta_1^2.$$

Из последнего соотношения выражаем α_0 и тогда

$$\alpha = \frac{\alpha_1^2 + \beta_1^2}{b + \alpha_2 + \beta_2}x^2 + 2\alpha_1 x + \alpha_2,\ \beta = \frac{\alpha_1^2 + \beta_1^2}{b + \alpha_2 + \beta_2}y^2 + 2\beta_1 y + \beta_2. \tag{14}$$

Далее находим f, интегрируя (8) при $g = (b + \theta)^{-1}$. Получим

$$f = c\ln(b + \theta) + c_1,$$

или, в силу (14),

$$f = c\ln(\frac{\alpha_1^2 + \beta_1^2}{b + \alpha_2 + \beta_2}(x^2 + y^2) + 2\alpha_1 x + +2\beta_1 y + \alpha_2 + \beta_2 + b) + c_1.$$

Обозначим $\alpha_2 + \beta_2 + b = \bar{b}$, тогда

$$f = c\ln((\alpha_1^2 + \beta_1^2)(x^2 + y^2) + 2\alpha_1\bar{b}x + 2\beta_1\bar{b}y + \bar{b}^2) + \bar{c}.$$

Положим $\alpha_1 = d\cos\varphi$, $\beta_1 = d\sin\varphi$, тогда

$$f = c\ln(d^2(x^2 + y^2) + 2d\bar{b}x\cos\varphi + 2d\bar{b}y\sin\varphi + \bar{b}^2) + \bar{c}.$$

или

$$f = c\ln(x^2 + y^2 + 2\tilde{b}x\cos\varphi + 2\tilde{b}y\sin\varphi + \tilde{b}^2) + \tilde{c}.$$

Окончательно получаем:

$$f = c\ln((x + \tilde{b}\cos\varphi)^2 + (y + \tilde{b}\sin\varphi)^2) + \tilde{c}. \tag{15}$$

Доказана

Теорема 2. *Криволинейная три-ткань, определяемая гармонической функцией, является регулярной тогда и только тогда, когда эта функция имеет вид (13) или (15).*

Аналогично доказываются

Теорема 3. *Криволинейная три-ткань, определяемая уравнением теплопроводности $u_t = a^2 u_{xx}$, является регулярной тогда и только тогда, когда функция и имеет вид*

$$u = b_2 \int e^{b_1 z^2} dz,$$

где

$$z = (bx + b_3)(-4a^2 b^2 b_1 t + b_4)^{-\frac{1}{2}}.$$

Теорема 4. *Криволинейная три-ткань, определяемая решением уравнения колебания $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, является регулярной тогда и только тогда, когда функция и имеет вид*

$$u = c \ln(\cosh(\alpha_0 + px) + \cosh(\beta_0 + apt)) + \bar{c}$$

или

$$u = c \ln((x + \tilde{b}\cosh\varphi)^2 - (at - \tilde{b}\sinh\varphi)^2) + \tilde{c}.$$

Литература

1. В. Бляшке. Введение в геометрию тканей. М. : Физматгиз, 1959, 144 с.
2. Шелехов А.М., Лазарева В.Б., Уткин А.А. Криволинейные три-ткани. Тверь, 2013, 237с.

HEXAGONAL SOLUTIONS OF SOME PDE'S

A.M. Shelekhov

For some PDE's, we find solutions to which the hexagonal three-web corresponds.
Keywords: three-web, PDE.

УДК 514.86; 515.146; 519.63

ПРИМЕНЕНИЯ ТОПОЛОГИИ В ОДНОЙ ЧИСЛЕННОЙ СХЕМЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД

Е.И. Яковлев[1], Д.Т. Чекмарев[2], В.Ю. Епифанов[3]

1 *evgeniy.yakovlev@itmm.unn.ru*; Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,Институт информационных технологий, математики и механики
2 *4ekm@mm.unn.ru*; Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,Институт информационных технологий, математики и механики
3 *vepifanov92@gmail.com*; Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,Институт информационных технологий, математики и механики

Обсуждаются некоторые численные схемы решения задач механики сплошных сред методом конечных элементов. Одним из авторов разработан способ ускорения вычислений, состоящий в использовании симплициальной сетки, вписанной в исходное кубическое клеточное разбиение трехмерного тела. В данной работе показано, что препятствие к построению этой конструкции описывается в терминах групп гомологий по